

Solutions globales pour des équations de Schrödinger sur-critiques en toutes dimensions

A.Poiret ^a,

^a*Faculté des sciences d'Orsay, Département de mathématiques, Bâtiment 430 Bureau 106, France*

Résumé

Dans [P], on a expliqué comment construire un grand nombre de solutions globales pour l'équation de Schrödinger cubique en dimension 3 avec des données initiales dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. Les arguments de bases étant vraie en dimensions plus grandes que 2, nous pouvons adapter la preuve dans ces cas là. On explique dans cet article comment utiliser l'effet régularisant pour prouver un théorème analogue en toutes dimensions, en particulier en dimension 1. Le gain de régularité est plus faible mais l'on peut choisir une base de fonctions propres quelconques et des variables aléatoires autres que gaussiennes.

Key words: effet régularisant, solutions globales, oscillateur harmonique, données aléatoires, équations de Schrödinger sur-critiques

Email address: aurelien.poiret@math.u-psud.fr (A.Poiret).

Dans cet article, on considère les équations de Schrödinger suivantes :

$$\begin{cases} i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \Delta \tilde{u} = K |\tilde{u}|^{p-1} \tilde{u}, \\ \tilde{u}(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (NLS)$$

où $K \in \{-1, 1\}$ et p désigne un entier impair.

Dans [P], on donne une méthode pour construire des solutions globales pour les équations de Schrödinger dont le nombre de dérivée sur-critiques est inférieure à $\frac{1}{2}$, en dimension plus grande que 2. L'idée de la preuve est de rendre la donnée initiale aléatoire et d'utiliser des estimées bilinéaires de type Bourgain. Ici, on propose de compléter ce résultat, en particulier en établissant le théorème en dimension 1.

En dimension 1, dans [BTT], il est prouvé que l'effet régularisant permet de gagner $\frac{1}{2} - \frac{2}{p-1}$ dérivée sur la donnée initiale. Cela signifie que des estimées linéaires sont suffisantes pour établir le résultat en dimension 1. Cette méthode est très spécifique à la dimension 1 et ne peut être généralisée directement en dimension plus grande. Néanmoins, pour $p \geq 5$ et $u_0 \in \overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)$, le même schéma de preuve permet de gagner le nombre de dérivée manquant.

Ce résultat est très intéressant car il n'est plus nécessaire de supposer que les fonctions propres soient les fonctions tenseurs. Une base de fonctions propres quelconques est satisfaisante et le théorème est vérifié pour un plus grand nombre de mesure de probabilité.

De plus, on propose une preuve du théorème dans un cadre plus général que des variables aléatoires gaussiennes ou Bernoulli.

1. Introduction et notations

En dimension d'espace d quelconque, on pose $H = -\Delta + x^2$ l'oscillateur harmonique. On note λ_n^2 les valeurs propres et h_n les fonctions propres de H que l'on indexe par $n \in \mathbb{N}$. On a donc

$$H h_n = \lambda_n^2 h_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On note $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ et $H^s(\mathbb{R}^d)$ les espaces de Sobolev usuels. Puis, on définit les espaces de Sobolev harmoniques.

Définition 1 *L'espace $\overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est défini comme la fermeture de l'espace de Schwartz pour la norme*

$$\|u\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^d)} = \|H^{s/2}u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Définition 2 *De manière similaire, l'espace $\overline{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ est défini comme la fermeture de l'espace de Schwartz pour la norme*

$$\|u\|_{\overline{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)} = \|H^{s/2}u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Dans [DG], nous pouvons trouver la proposition suivante :

Proposition 3 *Pour tous $1 < p < \infty$, $s \geq 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\frac{1}{C} \|u\|_{\overline{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)} \leq \|\nabla^s u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \| \langle x \rangle^s u \|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u\|_{\overline{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)}.$$

Ensuite, soit (Ω, A, P) un espace de probabilité, $(g_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires indépendantes et définissons les conditions suivantes :

$$\boxed{\exists \gamma, C, c > 0 / \forall n \in \mathbb{N} \text{ and } \rho \in \mathbb{R}, \int_{\rho}^{\infty} dP_{g_n} + \int_{-\infty}^{-\rho} dP_{g_n} \leq C e^{-c|\rho|^{\gamma}}} \quad (H_{\gamma})$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \text{ et } n \in \mathbb{N}, E(g_n^{2p+1}) = 0} \quad (H_{E_1})$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, E(g_n) = 0} \quad (H_{E_2})$$

$$\boxed{\forall \rho > 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}, P(|g_n| < \rho) > 0} \quad (H_{01})$$

$$\boxed{\exists c > 0 / \forall n \in \mathbb{N}, E(|g_n|^2) \geq c} \quad (H_{02})$$

Nous avons facilement le lemme suivant :

Lemme 4 *Sous l'hypothèse (H_{γ}) , il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$E(|g_n|^2)^2 \leq E(|g_n|^4) \leq C.$$

Preuve. $E(|g_n|^4) = 4 \int_0^{\infty} \rho^3 P(\omega \in \Omega / |g_n(\omega)| \geq \rho) d\rho \leq 4C \int_0^{\infty} \rho^3 e^{-c\rho^{\gamma}} d\rho < \infty.$ \square

Soit $u_0 \in \overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)$, c'est à dire

$$u_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n h_n(x) \text{ avec } \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{d-1} |c_n|^2 < \infty.$$

Considérons l'application $\omega \rightarrow u_0^{\omega}$ de (Ω, A, P) dans $\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)$ que l'on équipe de sa tribu borélienne, définie par $u_0^{\omega} = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n g_n(\omega) h_n(x)$.

Grâce au lemme 4, nous pouvons facilement vérifier que l'application $\omega \rightarrow u_0^{\omega}$ est dans $L^2(\Omega, \overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d))$. Enfin, on définit μ comme la loi de la variable aléatoire $\omega \rightarrow u_0(\omega, \cdot)$ et nous pouvons donc appliquer le théorème de transfert suivant :

$$P(\omega \in \Omega / \Psi(u_0^{\omega}) \in A) = \mu(u_0 \in \overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d) / \Psi(u_0) \in A), \quad (1)$$

pour toute fonction mesurable Ψ et A ensemble mesurable.

Pour pouvoir énoncer les théorèmes de ce papier, on introduit les deux définitions suivantes :

Définition 5 *Soit $(q, r) \in [2, \infty]$ alors (q, r) est dit admissible si*

$$(d, q, r) \neq (2, 2, \infty) \text{ et } \frac{2}{q} = \frac{d}{2} - \frac{d}{r}.$$

Définition 6 Pour $s \in \mathbb{R}$ et $T > 0$, on définit

$$X^s = \bigcap_{(q,r) \text{ admissible}} L^q(\mathbb{R}, W^{s,r}(\mathbb{R}^d)),$$

$$X_T^s = \bigcap_{(q,r) \text{ admissible}} L^q([-T, T], W^{s,r}(\mathbb{R}^d)).$$

Dans cet article, sous les hypothèses (H_γ) , (H_{E_1}) , (H_{01}) et (H_{02}) ou (H_γ) , (H_{E_2}) , (H_{01}) et (H_{02}) , on propose de démontrer les théorèmes suivants :

Theorem 7 Soit $u_0 \in \overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)$ alors il existe $s \in]\frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}, \frac{d}{2}[$ et un ensemble $\Omega' \subset \Omega$ tels que les conditions suivantes soient réalisées :

- i) $P(\Omega') > 0$.
- ii) Pour tout élément $\omega \in \Omega'$, il existe une unique solution globale \tilde{u} à l'équation (NLS) dans l'espace $e^{it\Delta}u_0(\omega, \cdot) + X^s$ avec donnée initiale $u_0(\omega, \cdot)$.
- iii) Pour tout élément $\omega \in \Omega'$, il existe $L^+ \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$ et $L_- \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0(\omega, \cdot) - e^{it\Delta}L^+\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0(\omega, \cdot) - e^{it\Delta}L_-\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

De plus, si $u_0 \notin \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$ alors $P(\omega \in \Omega / u_0(\omega, \cdot) \in H^s(\mathbb{R}^d)) = 0$.

Theorem 8 Soit $u_0 \in \overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)$ alors il existe $s \in]\frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}, \frac{d}{2}[$ tel que pour tout $\omega \in \Omega$, il existe T_ω et une unique solution à l'équation (NLS) dans l'espace $e^{it\Delta}u_0(\omega, \cdot) + X_{T_\omega}^s$ avec donnée initiale $u_0(\omega, \cdot)$.

Plus précisément, il existe $C, c, \delta > 0$ et pour tout temps $0 < T < \infty$, un ensemble Ω_T tels que

$$P(\Omega_T) \geq 1 - Ce^{-c/\arctan(2T)^\delta},$$

et tel que pour tout élément $\omega \in \Omega_T$, il existe une unique solution à l'équation (NLS) avec donnée initiale $u_0(\omega, \cdot)$ dans un espace continûment inclus dans $C^0([-T, T], H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d))$.

Theorem 9 Si de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n a une distribution symétrique, alors

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \mu \left(u_0 \in \overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d) / \text{on ait existence globale et scattering} \mid \|u_0\|_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)} \leq \eta \right) = 1.$$

2. Quelques rappels préliminaires

Dans cette section, on rappelle les estimées de Strichartz pour l'oscillateur harmonique ainsi que la propriété fondamentale de la transformation de lentille. Les preuves peuvent être trouvées dans [P].

2.1. Estimées de Strichartz pour l'oscillateur harmonique

Définition 10 Pour $s \in \mathbb{R}$ et $T \geq 0$, on définit

$$\overline{X}_T^s = \bigcap_{(q,r) \text{ admissible}} L^q([-T, T], \overline{W}^{s,r}(\mathbb{R}^d)).$$

Alors, nous avons les propositions suivantes :

Proposition 11 *Pour tout $T \geq 0$, il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour tout $u \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$,*

$$\|e^{-itH}u\|_{\overline{X}_T^s} \leq C_T \|u\|_{\overline{H}^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Proposition 12 *Pour tout $T \geq 0$, il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour tout (q, r) admissible et $F \in L^{q'}([-T, T], \overline{W}^{s, r'}(\mathbb{R}^d))$,*

$$\left\| \int_0^t e^{-i(t-s)H} F(s) ds \right\|_{\overline{X}_T^s} \leq C_T \|F\|_{L^{q'}([-T, T], \overline{W}^{s, r'}(\mathbb{R}^d))}.$$

2.2. La transformation de lentille

Définition 13 *Pour $u(t, x)$ une fonction mesurable avec $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on définit $\tilde{u}(t, x)$ de la façon suivante :*

$$\tilde{u}(t, x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \right)^{d/2} \times u \left(\frac{1}{2} \arctan(2t), \frac{x}{\sqrt{1+4t^2}} \right) \times e^{\frac{ix^2 t}{1+4t^2}}.$$

En analogie à la proposition 22 de [P], on peut obtenir le résultat suivant :

Proposition 14 *Soit $s \geq 0$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $p \in [1, +\infty]$ et $q \in [1, +\infty]$ vérifiant $\frac{2}{p} + \frac{d}{q} - \frac{d}{2} \leq 0$, pour tout $T \in]0, \infty]$ et $u \in L^p([-\frac{1}{2} \arctan(2T), \frac{1}{2} \arctan(2T)], \overline{W}^{s, q}(\mathbb{R}^d))$, on a*

$$\|\tilde{u}\|_{L^p([-T, T], W^{s, q}(\mathbb{R}^d))} \leq C \|u\|_{L^p([-\frac{1}{2} \arctan(2T), \frac{1}{2} \arctan(2T)], \overline{W}^{s, q}(\mathbb{R}^d))}.$$

3. L'effet régularisant pour l'oscillateur harmonique

On commence par donner une preuve de l'effet régularisant de [YZ1] et [YZ2] en utilisant une méthode de Doï. Cet effet régularisant se révélera fondamental pour appliquer le théorème de point fixe de Picard. L'objectif de cette partie est donc de prouver le théorème suivant :

Theorem 15 *Soit $\epsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$,*

$$\left\| \frac{1}{\langle x \rangle^{1/2-\epsilon}} \sqrt{H}^{1/2-2\epsilon} e^{itH} u_0 \right\|_{L^2([-2\pi, 2\pi] * \mathbb{R}^d)} \leq C \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad (2)$$

et pour tout $u_0 \in \overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)$,

$$\left\| \frac{1}{\langle x \rangle^{1/2-\epsilon}} |\nabla|^{d/2-2\epsilon} e^{itH} u_0 \right\|_{L^2([-2\pi, 2\pi] * \mathbb{R}^d)} \leq C \|u_0\|_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)}. \quad (3)$$

3.1. Quelques résultats préliminaires

On commence par établir 4 lemmes préliminaires.

Lemma 16 Soit $a \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ telle que $\nabla a \in L^\infty(\mathbb{R}^d, M_d(\mathbb{R}^d))$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^{1/2}(\mathbb{R}^d)$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} a(x) \cdot \nabla u(x) \bar{u}(x) \, dx \right| \leq C \|u\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Preuve. On définit

$$b(u, v) = \int_{\mathbb{R}^d} a(x) \cdot \nabla u(x) v(x) \, dx.$$

Alors, clairement, on a

$$|b(u, v)| \leq C \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

ainsi que

$$|b(u, v)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \sum_{i=1}^d \partial_i (a_i(x) v(x)) \, dx \right| \leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Par conséquent, par interpolation, pour tout $s \in [0, 1]$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|b(u, v)| \leq C \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{H^{1-s}(\mathbb{R}^d)}.$$

Le lemme est donc démontré en choisissant $s = 1/2$. \square

Lemma 17 Soit $a \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ telle que $|a(x)| \leq |x|^{2\epsilon}$ et $|\nabla a(x)| \leq 1$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in \bar{H}^{1/2+\epsilon}(\mathbb{R}^d)$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} a(x) \cdot \nabla u(x) \bar{u}(x) \, dx \right| \leq C \|u\|_{\bar{H}^{1/2+\epsilon}(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Preuve. Il s'agit essentiellement de la même preuve que le lemme 16.

On définit

$$b(u, v) = \int_{\mathbb{R}^d} a(x) \cdot \nabla u(x) v(x) \, dx.$$

Alors, on trouve

$$|b(u, v)| \leq C \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{\bar{H}^{2\epsilon}(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u\|_{\bar{H}^1(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{\bar{H}^{2\epsilon}(\mathbb{R}^d)},$$

ainsi que

$$\begin{aligned} |b(u, v)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} u(x) \sum_{i=1}^d \partial_i (a_i(x) v(x)) \, dx \right| \leq C \|u\|_{\bar{H}^{2\epsilon}(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C \|u\|_{\bar{H}^{2\epsilon}(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{\bar{H}^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Puis, par interpolation, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $s \in [0, 1]$,

$$|b(u, v)| \leq C \|u\|_{\bar{H}^{(1-2\epsilon)s+2\epsilon}(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{\bar{H}^{1-s(1-2\epsilon)}(\mathbb{R}^d)}.$$

Le lemme est donc prouvé en prenant $s = 1/2$. \square

Lemma 18 Soient s_1 et s_2 deux réels.

- Si $\max(s_2, s_1 + s_2) \leq 1$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\| [\sqrt{H}^{s_1+s_2}; < x >^{-s_1}] u \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

- Si $s_2 \geq -1$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^{s_1-1}(\mathbb{R}^d)$,

$$\| [|\nabla|^{s_1}; <x>^{-s_2}]u \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u\|_{H^{s_1-1}(\mathbb{R}^d)},$$

- Si $s_2 \leq 1$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in \overline{H}^{s_1-s_2}(\mathbb{R}^d)$,

$$\| [\sqrt{H}^{s_1}; <x>^{-s_2}]u \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u\|_{\overline{H}^{s_1-s_2}(\mathbb{R}^d)}.$$

Preuve. Pour évaluer la régularité du commutateur, on utilise le calcul pseudo-différentiel de Wey-Hörmander associé à la métrique $\frac{dx^2}{1+x^2} + \frac{d\xi^2}{1+\xi^2}$.

La classe des symboles $S(\mu, m)$ associée à la métrique précédente est l'espace des fonctions régulières sur $\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d$ qui vérifient $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} <x>^{\mu-\alpha} <\xi>^{m-\beta}$.

Ainsi, nous avons (voir [H] section 18.5, [R] ou [Bou1]) que si $a_1 \in S(\mu_1, m_1)$ et $a_2 \in S(\mu_2, m_2)$ alors le commutateur $[Op(a_1), Op(a_2)]$ est un opérateur pseudo-différentiel avec un symbole dans la classe $S(\mu_1 + \mu_2 - 1, m_2 + m_2 - 1)$.

Par conséquent,

$$[\sqrt{H}^{s_1+s_2}, <x>^{-s_1}] \in S(s_2 - 1, s_1 + s_2 - 1) \subset S(0, s_1 + s_2 - 1).$$

De plus, comme rappelé dans [M], si $q \in S(0, \mu)$ alors pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|Op(q)u\|_{H^{s-\mu}(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Ainsi, nous pouvons prendre $s = \mu = s_1 + s_2 - 1$ pour obtenir que

$$\| [\sqrt{H}^{s_1+s_2}, <x>^{-s_1}]u \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u\|_{H^{s_1+s_2-1}(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

De manière similaire,

$$[|\nabla|^{s_1}; <x>^{-s_2}] \in S(-s_2 - 1, s_1 - 1) \subset S(0, s_1 - 1),$$

et nous pouvons conclure de la même façon pour le second point.

Pour le dernier point, nous avons

$$[\sqrt{H}^{s_1}; <x>^{-s_2}] \sqrt{H}^{s_2-s_1} \in S(-1, s_2 - 1) \subset S(0, s_2 - 1).$$

Puis

$$\| [\sqrt{H}^{s_1}; <x>^{-s_2}] \sqrt{H}^{s_2-s_1} u \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

et il suffit de remplacer u par $\sqrt{H}^{s_1-s_2} u$ pour obtenir le résultat désiré. \square

Lemma 19 Soit $s \geq 0$ alors il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$C_1 \times \| |\nabla|^s(f) \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \| \nabla^s(f) \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_2 \times \| |\nabla|^s(f) \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Preuve. En utilisant l'égalité de Plancherel, il suffit de remarquer que la fonction

$$b(\xi_1, \dots, \xi_d) = \frac{\left(\sum_i \xi_i^2 \right)^{s/2}}{\sqrt{\sum_i \xi_i^{2s}}},$$

est positive, continue sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et homogène (c'est à dire que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $b(\lambda\xi) = b(\xi)$). \square

Ces différents lemmes établis, nous pouvons passer à la preuve de l'effet régularisant.

3.2. Preuve de (2)

Étape 1 :

À l'aide du calcul pseudo différentiel, soit le théorème 2.6.5 de [M], on trouve

$$\begin{aligned} & \left[\frac{x.D_x}{\langle x \rangle^\alpha}; \Delta \right] \\ &= \frac{x.D_x}{\langle x \rangle^\alpha} \Delta - \Delta \frac{x.D_x}{\langle x \rangle^\alpha} \\ &= Op \left(\frac{x.\xi}{\langle x \rangle^\alpha} \right) Op(-\xi^2) - Op(-\xi^2) Op \left(\frac{x.\xi}{\langle x \rangle^\alpha} \right) \\ &= Op \left(-2i \times \left(\frac{\xi^2}{\langle x \rangle^\alpha} - \alpha \frac{(x.\xi)^2}{\langle x \rangle^{\alpha+2}} \right) + 2\alpha(d+2) \frac{x.\xi}{\langle x \rangle^{\alpha+2}} + 2\alpha(\alpha+2) \frac{x.\xi x^2}{\langle x \rangle^{\alpha+4}} \right). \end{aligned}$$

Puis, en utilisant que $\alpha < 1$, on obtient

$$\begin{aligned} & \Re \left(i \int_{\mathbb{R}^d} Op \left(-2i \times \left(\frac{\xi^2}{\langle x \rangle^\alpha} - \alpha \frac{(x.\xi)^2}{\langle x \rangle^{\alpha+2}} \right) u(x) \times \bar{u}(x) dx \right) \right) \\ &= 2\Re \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{-\Delta u}{\langle x \rangle^\alpha} \bar{u} - \alpha \frac{(x.D_x)^2 u + i(x.D_x)u}{\langle x \rangle^{\alpha+2}} \bar{u} dx \right) \\ &= 2\Re \left(\int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \cdot \nabla \left(\frac{\bar{u}}{\langle x \rangle^{\alpha+2}} \right) - \alpha(x.\nabla u) \times \operatorname{div} \left(\frac{x\bar{u}}{\langle x \rangle^{\alpha+2}} \right) - i\alpha \frac{(x.D_x)u}{\langle x \rangle^{\alpha+2}} \bar{u} dx \right) \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{|\nabla u|^2}{\langle x \rangle^\alpha} - \alpha \frac{(x.\nabla u)^2}{\langle x \rangle^{\alpha+2}} dx \right) \\ & \quad + 2\alpha \Re \left(\int_{\mathbb{R}^d} (\alpha+2) \frac{x^2(x.\nabla u)}{\langle x \rangle^{\alpha+4}} \bar{u} - (d+1) \frac{x.\nabla u}{\langle x \rangle^{\alpha+2}} \bar{u} dx \right) \\ &\geq 2(1-\alpha) \times \left\| \frac{1}{\langle x \rangle^{\alpha/2}} \nabla u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & \quad + 2\alpha \Re \left(\int_{\mathbb{R}^d} (\alpha+2) \frac{x^2(x.\nabla u)}{\langle x \rangle^{\alpha+4}} \bar{u} - (d+1) \frac{x.\nabla u}{\langle x \rangle^{\alpha+2}} \bar{u} dx \right). \end{aligned}$$

Grâce au lemme 16, on établit

$$\begin{aligned} & \Re \left(i \int_{\mathbb{R}^d} Op \left(2\alpha(d+2) \frac{x.\xi}{\langle x \rangle^{\alpha+2}} + 2\alpha(\alpha+2) \frac{x.\xi x^2}{\langle x \rangle^{\alpha+4}} \right) u \bar{u} dx \right) \\ & \quad + 2\alpha \Re \left(\int_{\mathbb{R}^d} (\alpha+2) \frac{x^2(x.\nabla u)}{\langle x \rangle^{\alpha+4}} \bar{u} - (d+1) \frac{x.\nabla u}{\langle x \rangle^{\alpha+2}} \bar{u} dx \right) \leq C \|u\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\alpha < 1$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^{1/2}(\mathbb{R}^d)$,

$$\Re \left(i \int_{\mathbb{R}^d} \left[\frac{x \cdot D_x}{\langle x \rangle^\alpha}, \Delta \right] u(x) \overline{u(x)} dx \right) \geq 2(1-\alpha) \left\| \frac{1}{\langle x \rangle^{\alpha/2}} \nabla u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 - C \|u\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)}^2.$$

De manière similaire, on a

$$\left[\frac{x \cdot D_x}{\langle x \rangle^\alpha}; -x^2 \right] = Op \left(\frac{2ix^2}{\langle x \rangle^\alpha} \right),$$

et donc

$$\begin{aligned} \Re \left(i \int_{\mathbb{R}^d} \left[\frac{x \cdot D_x}{\langle x \rangle^\alpha}; -x^2 \right] u(x) \overline{u(x)} dx \right) &= -2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{x^2}{\langle x \rangle^\alpha} |u(x)|^2 dx \\ &\geq -C \|u\|_{\overline{H}^{(2-\alpha)/2}(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Finalement, nous avons montré que pour tout $\alpha < 1$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in \overline{H}^{(2-\alpha)/2}(\mathbb{R}^d)$

$$\Re \left(i \int_{\mathbb{R}^d} \left[\frac{x \cdot D_x}{\langle x \rangle^\alpha}, -H \right] u(x) \overline{u(x)} dx \right) \geq 2(1-\alpha) \left\| \frac{1}{\langle x \rangle^{\alpha/2}} \nabla u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 - C \|u\|_{\overline{H}^{(2-\alpha)/2}(\mathbb{R}^d)}^2. \quad (4)$$

Étape 2 :

Si nous choisissons $u = e^{-itH} u_0$ alors nous trouvons

$$\begin{aligned} &-i \int_{\mathbb{R}^d} \left[\frac{x \cdot D_x}{\langle x \rangle^\alpha}, H \right] u(t, x) \overline{u(t, x)} dx \\ &= -i \int_{\mathbb{R}^d} \frac{x \cdot \nabla \partial_t u(t, x)}{\langle x \rangle^\alpha} \overline{u(t, x)} dx + i \int_{\mathbb{R}^d} \frac{x \cdot D_x}{\langle x \rangle^\alpha} u(t, x) \overline{Hu(t, x)} dx \\ &= -i \int_{\mathbb{R}^d} \frac{x \cdot \nabla_x \partial_t u(t, x)}{\langle x \rangle^\alpha} \overline{u(t, x)} dx - i \int_{\mathbb{R}^d} \frac{x \cdot \nabla_x}{\langle x \rangle^\alpha} u(t, x) \overline{\partial_t u(t, x)} dx \\ &= -i \partial_t \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{x \cdot \nabla_x}{\langle x \rangle^\alpha} u(t, x) \overline{u(t, x)} dx \right). \end{aligned}$$

Ainsi, grâce à (4), on obtient pour $T \geq 0$,

$$\begin{aligned} &2(1-\alpha) \int_0^T \left\| \frac{1}{\langle x \rangle^{\alpha/2}} \nabla (e^{-itH} u_0) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dt \\ &\leq CT \|u_0\|_{\overline{H}^{(2-\alpha)/2}(\mathbb{R}^d)}^2 + \Re \left(i \int_{\mathbb{R}^d} \frac{x \cdot \nabla_x u_0}{\langle x \rangle^\alpha} \overline{u_0} - \frac{x \cdot \nabla_x e^{-iTH} u_0}{\langle x \rangle^\alpha} \overline{e^{-iTH} u_0} dx \right). \end{aligned}$$

Puis, par le lemme 17, on trouve pour tout $\alpha \in]0, 1[$, l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $T \geq 0$ et $u_0 \in \overline{H}^{(2-\alpha)/2}(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_0^T \left\| \frac{1}{\langle x \rangle^{\alpha/2}} \nabla e^{-itH} u_0 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dt \leq CT \|u_0\|_{\overline{H}^{(2-\alpha)/2}(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Étape 3 :

On prend $\alpha = 1 - 2\epsilon$ avec $\epsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ pour avoir

$$\int_0^T \left\| \frac{1}{\langle x \rangle^{1/2-\epsilon}} \nabla e^{-itH} u_0 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dt \leq CT \|u_0\|_{\overline{H}^{1/2+\epsilon}(\mathbb{R}^d)}^2.$$

En utilisant le lemme 18, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left\| \frac{1}{\langle x \rangle^{1/2-\epsilon}} H^{1/2-\epsilon/2} e^{itH} u_0 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dt \\
& \leq \int_0^T \left\| H^{1/2-\epsilon/2} \frac{1}{\langle x \rangle^{1/2-\epsilon}} e^{itH} u_0 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
& \quad + \int_0^T \left\| \left[\frac{1}{\langle x \rangle^{1/2-\epsilon}}; H^{1/2-\epsilon/2} \right] e^{itH} u_0 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dt \\
& \leq \int_0^T \left\| H^{1/2-\epsilon/2} \frac{1}{\langle x \rangle^{1/2-\epsilon}} e^{itH} u_0 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dt + T \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.
\end{aligned}$$

Puis, en utilisant la proposition 3, on trouve

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left\| H^{1/2-\epsilon/2} \frac{1}{\langle x \rangle^{1/2-\epsilon}} e^{itH} u_0 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dt \\
& \leq \int_0^T \left\| \langle x \rangle^{1/2+\epsilon/2} e^{itH} u_0 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dt + \int_0^T \left\| \nabla^{1-\epsilon} \left(\frac{1}{\langle x \rangle^{1/2-\epsilon}} e^{itH} u_0 \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dt \\
& \leq CT \|u_0\|_{\dot{H}^{1/2+\epsilon}(\mathbb{R}^d)}^2 + \int_0^T \left\| \nabla \left(\frac{1}{\langle x \rangle^{1/2-\epsilon}} e^{itH} u_0 \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dt \\
& \leq CT \|u_0\|_{\dot{H}^{1/2+\epsilon}(\mathbb{R}^d)}^2 + \int_0^T \left\| \frac{1}{\langle x \rangle^{1/2-\epsilon}} \nabla (e^{itH} u_0) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dt \\
& \leq CT \|u_0\|_{\dot{H}^{1/2+\epsilon}(\mathbb{R}^d)}^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous trouvons

$$\int_0^T \left\| \frac{1}{\langle x \rangle^{1/2-\epsilon}} H^{1/2-\epsilon/2} e^{-itH} u_0 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dt \leq CT \|u_0\|_{\dot{H}^{1/2+\epsilon}(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Et nous pouvons remplacer u_0 par $H^{-1/4-\epsilon/2} u_0$ pour prouver le théorème. \square

3.3. Preuve de (3)

En utilisant le lemme 18 et (2), on obtient

$$\begin{aligned}
& \left\| \sqrt{H}^{d/2-2\epsilon} \frac{1}{\langle x \rangle^{1/2-\epsilon}} e^{itH} u_0 \right\|_{L^2([-2\pi, 2\pi] * \mathbb{R}^d)} \\
& \leq \left\| \frac{1}{\langle x \rangle^{1/2-\epsilon}} \sqrt{H}^{d/2-2\epsilon} e^{itH} u_0 \right\|_{L^2([-2\pi, 2\pi] * \mathbb{R}^d)} \\
& \quad + \left\| \left[\sqrt{H}^{d/2-2\epsilon}; \frac{1}{\langle x \rangle^{1/2-\epsilon}} \right] e^{itH} u_0 \right\|_{L^2([-2\pi, 2\pi] * \mathbb{R}^d)} \\
& \leq C \|u_0\|_{\dot{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Puis, en utilisant la proposition 3, on établit

$$\left\| |\nabla|^{d/2-2\epsilon} \left(\frac{1}{\langle x \rangle^{1/2-\epsilon}} e^{itH} u_0 \right) \right\|_{L^2([-2\pi, 2\pi] * \mathbb{R}^d)} \leq C \|u_0\|_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)}.$$

Et finalement, en utilisant les lemmes 18 et 19, nous pouvons conclure que

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\langle x \rangle^{1/2-\epsilon}} |\nabla|^{d/2-2\epsilon} (e^{itH} u_0) \right\|_{L^2([-2\pi, 2\pi] * \mathbb{R}^d)} \\ & \leq \left\| \left[\frac{1}{\langle x \rangle^{1/2-\epsilon}}; |\nabla|^{d/2-2\epsilon} \right] e^{itH} u_0 \right\|_{L^2([-2\pi, 2\pi] * \mathbb{R}^d)} \\ & \quad + \left\| |\nabla|^{d/2-2\epsilon} \left(\frac{1}{\langle x \rangle^{1/2-\epsilon}} e^{itH} u_0 \right) \right\|_{L^2([-2\pi, 2\pi] * \mathbb{R}^d)} \\ & \leq C \|u_0\|_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)}. \quad \square \end{aligned}$$

4. Données initiales aléatoires et espaces de Sobolev

De manière analogue à la section 4 de [P], on démontre que la donnée initiale rendue aléatoire ne permet pas de gagner de dérivée dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Theorem 20 *Sous les hypothèses (H_γ) , (H_{E_1}) et (H_{02}) , pour tout $s \geq 0$,*

$$\text{si } u_0 \notin \overline{H}^s(\mathbb{R}^d) \text{ alors } u_0^\omega \notin H^s(\mathbb{R}^d) \text{ } \omega \text{ ps.}$$

Pour établir ce résultat, en analogie au théorème 52 de [P], nous devons montrer le même type d'estimation que la proposition 30 de [P] pour des fonctions propres quelconques de l'oscillateur harmonique. Cela justifie la proposition suivante :

Proposition 21 *Pour tout $s \geq 0$, il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$C_1 \lambda_n^s \leq \|\nabla^s h_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_2 \lambda_n^s. \quad (5)$$

Preuve. Nous posons $h = \frac{1}{\lambda_n^2}$ et $\Phi_h(x) = \frac{1}{h^{d/4}} \times h_n(\lambda_n x)$ pour que $(-h^2 \Delta + x^2 - 1)\Phi_h = 0$ et $\|\Phi_h\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$.

Pour démontrer (5), il suffit d'établir qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout $h > 0$,

$$h^s \|\nabla^s \Phi_h\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \geq C_1.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^s \|\nabla^s \Phi_h\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0. \quad (6)$$

D'après le théorème 2 de [Bu], il existe une mesure positive $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d)$ telle que pour toute fonction $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d)$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \langle a(x, hD_x) \Phi_h, \Phi_h \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d) * L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d} \text{tr}(a(x, \xi)) \mu(dx d\xi).$$

Rappelons la définition suivante :

Définition 22 *On dit que $(x, \xi) \in \text{Supp}(\mu)^c$ si et seulement si il existe $r > 0$ tel que pour tout $\phi \in C_0^\infty(B(x, r) \times B(\xi, r))$,*

$$\int_{\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d} \phi(x, \xi) \mu(dx, d\xi) = 0.$$

De manière similaire à la proposition 40 de [P], si $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d)$ avec $Supp(a) \cap \{(x, \xi)/x^2 + \xi^2 = 1\} = \emptyset$ alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $E_N \in Op(T^{-2})$ et $R_N \in Op(T^{-(N+1)})$ tels que

$$E_N \circ (-h^2 \Delta + |x|^2 - 1) = a(x, hD_x) - h^{N+1} R_N.$$

Par conséquent

$$\langle a(x, hD_x) \Phi_h, \Phi_h \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d) * L^2(\mathbb{R}^d)} = h^{N+1} \langle R_N \Phi_h, \Phi_h \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d) * L^2(\mathbb{R}^d)},$$

puis

$$\int_{\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d} a(x, \xi) \mu(dx d\xi) = 0.$$

Et finalement, nous établissons que

$$Supp(\mu) \subset \{(x, \xi)/x^2 + \xi^2 = 1\}.$$

Toujours de manière similaire à la proposition 40 de [P], si $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d)$ avec $Supp(a) \cap \{(x, \xi)/\xi^2 = 0\} = \emptyset$ alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $E_N \in Op(S^{-s})$ et $R_N \in Op(S^{-(N+1)})$ tels que

$$E_N \circ \sum_{i=1}^d |hD_{x_i}|^s = a(x, hD_x) - h^{N+1} R_N.$$

Or d'après [M] et (6), on trouve

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} | \langle E_N \circ \sum_{i=1}^d |hD_{x_i}|^s \Phi_h, \Phi_h \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d) * L^2(\mathbb{R}^d)} | &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \| E_N \circ \sum_{i=1}^d |hD_{x_i}|^s \Phi_h \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \| \sum_{i=1}^d |hD_{x_i}|^s \Phi_h \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d} a(x, \xi) \mu(dx d\xi) = 0,$$

et nous établissons que

$$Supp(\mu) \subset \{(x, \xi)/\xi^2 = 0\}.$$

Ensuite, pour $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d)$ alors

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^d} [-h^2 \Delta + |x|^2 - 1; h^{-1} Op_h(a)] \Phi_h \overline{\Phi_h} \\ &= \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}^d} \{-h^2 \Delta + |x|^2 - 1; Op_h(a)\} \Phi_h \overline{\Phi_h} + h \times \int_{\mathbb{R}^d} Op_h(R) \Phi_h \overline{\Phi_h}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous déduisons que pour toute fonction $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d} (\xi \partial_x a - x \partial_\xi a) d\mu(x, \xi) = 0. \quad (7)$$

Soit alors $(x, \xi) \in \mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d$ et posons, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x(t) = x \cos(t) + \xi \sin(t), \\ \xi(t) = \xi \cos(t) - x \sin(t). \end{cases}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \xi(t) \text{ avec } x(0) = x, \\ \dot{\xi}(t) = -x(t) \text{ avec } \xi(0) = \xi. \end{cases}$$

D'après (7), on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d} a(x \cos(t) + \xi \sin(t), \xi \cos(t) - x \sin(t)) d\mu(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d} a(x, \xi) d\mu(x, \xi).$$

Par conséquent, si $(x_0, \xi_0) \in \text{Supp}(\mu)$ alors pour tout $r > 0$, il existe $a \in C_0^\infty(B((x_0, \xi_0), r))$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d} a(x \cos(t) + \xi \sin(t), \xi \cos(t) - x \sin(t)) d\mu(x, \xi) \neq 0.$$

Mais

$$\begin{aligned} & \text{Supp}(a(x \cos(t) + \xi \sin(t), \xi \cos(t) - x \sin(t))) \\ & \subset \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d / (x \cos(t) + \xi \sin(t), \xi \cos(t) - x \sin(t)) \in B((x_0, \xi_0), r)\} \\ & \subset B(\cos(t)x_0 - \sin(t)\xi_0, 2r) \times B(\sin(t)x_0 + \cos(t)\xi_0, 2r), \end{aligned}$$

et donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(\cos(t)x_0 - \sin(t)\xi_0, \sin(t)x_0 + \cos(t)\xi_0) \in \text{Supp}(\mu)$.

Mais pour $\xi_0 = 0, x_0^2 = 1$ alors $\sin(t)x_0 + \cos(t)\xi_0 = \sin(t)x_0 = 0$ est impossible et donc la proposition est démontrée par l'absurde. \square

Ensuite, pour une fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$, $\chi(x) = 0$ si $|x| \geq 2$ et $0 \leq \chi \leq 1$, définissons

$$\begin{aligned} \sigma_N^2 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi^2 \left(\frac{\lambda_n^2}{N^2} \right) |c_n|^2 \lambda_n^{2s} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty, \\ S_N &= \left\| \chi \left(\frac{H}{N^2} \right) u_0 \right\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \\ M &= \sup_{N \in \mathbb{N}^*} S_N. \end{aligned}$$

Passons à la preuve du théorème 20. En analogie à la preuve du théorème 52 de [P], il suffit d'établir que

$$P(M = \infty) > 0.$$

Grâce à (5) et aux hypothèses (H_{E_2}) et (H_{02}) , on trouve

$$\begin{aligned} & E \left(\left\| \chi \left(\frac{H}{N^2} \right) u_0 \right\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}^2 \right) \\ & \geq E \left(\sum_{n,m} \chi \left(\frac{\lambda_n^2}{N^2} \right) \chi \left(\frac{\lambda_m^2}{N^2} \right) c_n \overline{c_m} g_n(\omega) \overline{g_m(\omega)} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla^s(h_n) \nabla^s(h_m) dx \right) \\ & \geq E \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \chi^2 \left(\frac{\lambda_n^2}{N^2} \right) |c_n|^2 |g_n(\omega)|^2 \|\nabla^s(h_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \right) \\ & \geq C_1 \sigma_N^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, grâce à l'inégalité de Zygmound, soit le lemme 53 de [P] , on établit

$$\begin{aligned} P\left(M^2 \geq \frac{C_1 \sigma_N^2}{2}\right) &\geq P\left(S_N^2 \geq \frac{C_1 \sigma_N^2}{2}\right) \geq P\left(S_N^2 \geq \frac{\|\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}^2}{2}\right) \\ &\geq \frac{1}{4} \times \frac{E\left(\|\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}^2\right)^2}{E\left(\|\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}^4\right)}. \end{aligned}$$

Puis, grâce à (5), au lemme 4 et l'hypothèse (H_{E_2}) , on a

$$\begin{aligned} &E\left(\|\chi\left(\frac{H}{N^2}\right) u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}^4\right) \\ &\leq E\left(\sum_{n,m} \chi\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right) \chi\left(\frac{\lambda_m^2}{N^2}\right) c_n \overline{c_m} g_n(\omega) \overline{g_m(\omega)} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla^s(h_n) \nabla^s(h_m) dx\right)^2 \\ &\quad + E\left(\sum_{n,m} \chi\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right) \chi\left(\frac{\lambda_m^2}{N^2}\right) c_n \overline{c_m} g_n(\omega) \overline{g_m(\omega)}\right)^2 \\ &\leq CE\left(\sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} \chi\left(\frac{\lambda_{n_1}^2}{N^2}\right) \chi\left(\frac{\lambda_{n_2}^2}{N^2}\right) \chi\left(\frac{\lambda_{n_3}^2}{N^2}\right) \chi\left(\frac{\lambda_{n_4}^2}{N^2}\right) \times c_{n_1} \overline{c_{n_2}} c_{n_3} \overline{c_{n_4}}\right. \\ &\quad \times \|\nabla^s(h_{n_1})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla^s(h_{n_2})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla^s(h_{n_3})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla^s(h_{n_4})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\quad \left. + CE\left(\sum_n \chi^2\left(\frac{\lambda_n^2}{N^2}\right) |c_n|^2\right)^2\right) \\ &\leq C_2 \sigma_N^4. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$P\left(M^2 \geq \frac{C_1 \sigma_N^2}{2}\right) \geq \frac{1}{4} \times \frac{C_1^2}{C_2},$$

puis, en utilisant un théorème de convergence monotone, on trouve

$$P(M = \infty) \geq \frac{1}{4} \times \frac{C_1^2}{C_2}.$$

Et le théorème est démontré. \square

5. L'argument de point fixe

Dans cet partie, on établit des estimées qui seront utiles pour appliquer un théorème de point fixe de Picard. On commence par montrer deux lemmes préliminaires.

Lemma 23 Soient $(q, r) \in [2, \infty[\times [2, \infty]$, $s, s_0 \geq 0$ et supposons que $s - s_0 > \frac{d}{2} - \frac{2}{q} - \frac{d}{r}$, alors il existe deux constantes $\kappa, C > 0$ telles que pour tout $T \geq 0$ et $u \in \overline{X}_T^s$,

$$\|u\|_{L^q([-T, T], \overline{W}^{s_0, r}(\mathbb{R}^d))} \leq CT^\kappa \|u\|_{\overline{X}_T^s}.$$

Preuve. Soit $\epsilon > 0$ alors il existe $\kappa_\epsilon > 0$ tel que

$$\|u\|_{L^q([-T,T], \overline{W}^{s_0, r}(\mathbb{R}^d))} \leq T^{\kappa_\epsilon} \|u\|_{L^{q+\epsilon}([-T,T], \overline{W}^{s_0, r}(\mathbb{R}^d))}.$$

Or le couple $(q + \epsilon, \frac{2d(q+\epsilon)}{dq+d\epsilon-4})$ est admissible avec

$$\overline{W}^{s, \frac{2d(q+\epsilon)}{dq+d\epsilon-4}}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \overline{W}^{s_0, r}(\mathbb{R}^d) \text{ si } s - s_0 \geq \frac{d}{2} - \frac{2}{q+\epsilon} - \frac{d}{r}.$$

Mais, comme $s - s_0 > \frac{d}{2} - \frac{2}{q} - \frac{d}{r}$ alors il existe $0 < \epsilon \ll 1$ tel que $s - s_0 \geq \frac{d}{2} - \frac{2}{q+\epsilon} - \frac{d}{r}$. \square

Lemma 24 Soit $s \geq 0$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour toutes fonctions f et g dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\|\nabla^s(fg)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \times (\|\ |\nabla|^s(f) \times g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|f \times |\nabla|^s(g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}).$$

Preuve. Par la transformée de Fourier et le lemme 19, on obtient

$$\begin{aligned} \|\nabla^s(fg)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq C \times \|\ |\xi|^s \mathcal{F}(fg)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C \times \|\ |\xi|^s (\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g))\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Or pour tous ξ et η dans \mathbb{R}^d ,

$$|\xi|^s \leq (|\eta| + |\xi - \eta|)^s \leq C_s \times (|\eta|^s + |\xi - \eta|^s).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|\nabla^s(fg)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_s \times (\|\ |\cdot|^s \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathcal{F}(f) * (\|\cdot|^s \mathcal{F}(g))\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}) \\ &\leq C_s \times (\|\mathcal{F}(|\nabla|^s f \times g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(|\nabla|^s g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}) \\ &\leq C_s \times (\|\ |\nabla|^s f \times g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|f \times |\nabla|^s g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}). \end{aligned} \quad \square$$

Puis, on établit les estimées attendues.

Proposition 25 Soit $s > \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}$ alors il existe deux constantes $C > 0$ et $\kappa > 0$ telles que si nous supposons

$$\|e^{-itH}u_0\|_{L^p([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^d))} \leq \lambda$$

pour un certain λ , alors pour tout $0 < T \leq 1$, $v \in \overline{X}_T^s$ et $f_i = v$ ou $f_i = e^{-itH}u_0$,

$$\|\ |\nabla|^s(v) \times \prod_{i=2}^p f_i\|_{L^1([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \leq CT^\kappa (\lambda^p + \|v\|_{\overline{X}_T^s}^p),$$

et

$$\|\langle x \rangle^s \times v \times \prod_{i=2}^p f_i\|_{L^1([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \leq CT^\kappa (\lambda^p + \|v\|_{\overline{X}_T^s}^p).$$

Preuve. D'après l'inégalité de Hölder et la proposition 3,

$$\begin{aligned} &\|\ |\nabla|^s(v) \times \prod_{i=2}^p f_i\|_{L^1([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \\ &\leq \|\ |\nabla|^s(v)\|_{L^\infty([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \times \prod_{i=2}^p \|f_i\|_{L^{p-1}([-T, T], L^\infty(\mathbb{R}^d))} \\ &\leq C\|v\|_{L^\infty([-T, T], \overline{H}^s(\mathbb{R}^d))} \times \prod_{i=2}^p \|f_i\|_{L^{p-1}([-T, T], L^\infty(\mathbb{R}^d))}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \| \langle x \rangle^s \times v \times \prod_{i=2}^p f_i \|_{L^1([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \\
& \leq \| \langle x \rangle^s v \|_{L^\infty([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \times \prod_{i=2}^p \| f_i \|_{L^{p-1}([-T, T], L^\infty(\mathbb{R}^d))} \\
& \leq \| v \|_{L^\infty([-T, T], \overline{H}^s(\mathbb{R}^d))} \times \prod_{i=2}^p \| f_i \|_{L^{p-1}([-T, T], L^\infty(\mathbb{R}^d))}.
\end{aligned}$$

Si $f_i = v$ alors comme $s > \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}$, nous pouvons utiliser le lemme 23 pour obtenir

$$\| v \|_{L^{p-1}([-T, T], L^\infty(\mathbb{R}^d))} \leq CT^\kappa \| v \|_{\overline{X}_T^s}.$$

Si $f_i = e^{-itH} u_0$ alors d'après l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
\| e^{-itH} u_0 \|_{L^{p-1}([-T, T], L^\infty(\mathbb{R}^d))} & \leq T^{\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}} \| e^{-itH} u_0 \|_{L^p([-2\pi, 2\pi], L^\infty(\mathbb{R}^d))} \\
& \leq T^{\frac{1}{p(p-1)}} \lambda. \quad \square
\end{aligned}$$

Proposition 26 Soit $\frac{d}{2} > s > 0$ alors il existe deux constantes $C > 0$ et $\kappa > 0$ telles que si nous supposons que

$$\| e^{-itH} u_0 \|_{L^p([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{\frac{1}{s}, \infty}(\mathbb{R}^d))} \leq \lambda,$$

et

$$\| u_0 \|_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)} \leq \lambda$$

pour un certain λ , alors pour tout $0 < T \leq 1$,

$$\| \langle x \rangle^s \times (e^{-itH} u_0)^p \|_{L^1([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \leq CT^\kappa \lambda^p.$$

Preuve. D'après l'inégalité de Hölder et la proposition 3, on obtient

$$\begin{aligned}
& \| \langle x \rangle^s \times (e^{-itH} u_0)^p \|_{L^1([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \\
& \leq \| \langle x \rangle^{\frac{d}{2}} \times (e^{-itH} u_0)^p \|_{L^1([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \\
& \leq \| \langle x \rangle^{\frac{d-1}{2}} \times e^{-itH} u_0 \|_{L^\infty([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \times \| \langle x \rangle^{\frac{1}{2(p-1)}} \times e^{-itH} u_0 \|_{L^{p-1}([-T, T], L^\infty(\mathbb{R}^d))}^{p-1} \\
& \leq CT^{1/p} \| u_0 \|_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)} \times \| e^{-itH} u_0 \|_{L^p([-T, T], \overline{W}^{\frac{1}{s}, \infty}(\mathbb{R}^d))}^{p-1} \\
& \leq CT^{1/p} \lambda^p. \quad \square
\end{aligned}$$

Proposition 27 Il existe $s \in]\frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}; \frac{d}{2}[$, $C > 0$ et $\kappa > 0$ tels que si nous supposons que

$$\| e^{-itH} u_0 \|_{L^{2p}([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{\frac{1}{p}, \infty}(\mathbb{R}^d))} \leq \lambda,$$

et

$$\| u_0 \|_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)} \leq \lambda$$

pour un certain λ , alors pour tout $0 < T \leq 1$, $v \in \overline{X}_T^s$ et $f_i = v$ ou $f_i = e^{-itH} u_0$,

$$\| |\nabla|^s (e^{-itH} u_0) \times \prod_{i=2}^p f_i \|_{L^1([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \leq CT^\kappa (\lambda^p + \| v \|_{\overline{X}_T^s}^p).$$

Preuve. Pour tout $\epsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} & \left\| |\nabla|^s (e^{-itH} u_0) \times \prod_{i=2}^p f_i \right\|_{L^1([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq \left\| \frac{1}{\langle x \rangle^{1/2-\epsilon}} |\nabla|^s (e^{-itH} u_0) \right\|_{L^2([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \prod_{i=2}^p \left\| \langle x \rangle^{\frac{1}{p-1} * (\frac{1}{2}-\epsilon)} f_i \right\|_{L^{2(p-1)}([-T, T], L^\infty(\mathbb{R}^d))}. \end{aligned}$$

Puis, nous choisissons $s = \frac{d}{2} - 2\epsilon$ avec $\epsilon \ll 1$ pour obtenir en utilisant (3) que

$$\begin{aligned} & \left\| |\nabla|^s (e^{-itH} u_0) \times \prod_{i=2}^p f_i \right\|_{L^1([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq \lambda \times \prod_{i=2}^p \left\| \langle x \rangle^{\frac{1}{p-1} * (\frac{1}{2}-\epsilon)} f_i \right\|_{L^{2(p-1)}([-T, T], L^\infty(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq \lambda \times \prod_{i=2}^p \left\| f_i \right\|_{L^{2(p-1)}([-T, T], \overline{W}^{\frac{1}{p-1} * (\frac{1}{2}-\epsilon)+\epsilon, \frac{d}{\epsilon}+1}(\mathbb{R}^d))}, \end{aligned}$$

Si $f_i = e^{-itH} u_0$, par interpolation, nous pouvons trouver l'existence d'une constante $\kappa > 0$ telle que

$$\begin{aligned} & \left\| e^{-itH} u_0 \right\|_{L^{2(p-1)}([-T, T], \overline{W}^{\frac{1}{p-1} * (\frac{1}{2}-\epsilon)+\epsilon, \frac{d}{\epsilon}+1}(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq C \times T^\kappa \times \left\| e^{-itH} u_0 \right\|_{L^{2p}([-T, T], \overline{W}^{s_0, \infty}(\mathbb{R}^d))}^\theta \times \left\| e^{-itH} u_0 \right\|_{L^\infty([-T, T], \overline{W}^{\frac{d-1}{2}, 2}(\mathbb{R}^d))}^{1-\theta} \end{aligned}$$

où $\theta = \frac{d-\epsilon}{d+\epsilon}$ et $s_0 = (\frac{1-\theta}{\theta})(\frac{d-1}{2}) + \frac{1}{\theta(p-1)}(\frac{1}{2} - \epsilon) + \frac{\epsilon}{\theta}$.

Or $\left\| e^{-itH} u_0 \right\|_{L^\infty([-T, T], \overline{W}^{\frac{d-1}{2}, 2}(\mathbb{R}^d))} \leq \left\| u_0 \right\|_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)} \leq \lambda$, puis comme

$$s_0 = \frac{1}{2(p-1)} + C\epsilon + o(\epsilon) \leq \frac{1}{7}$$

alors $\left\| e^{-itH} u_0 \right\|_{L^{2p}([-T, T], \overline{W}^{s_0, \infty}(\mathbb{R}^d))} \leq \lambda$

et donc $\left\| e^{-itH} u_0 \right\|_{L^{2(p-1)}([-T, T], \overline{W}^{\frac{1}{p-1} * (\frac{1}{2}-\epsilon)+\epsilon, \frac{d}{\epsilon}+1}(\mathbb{R}^d))} \leq \lambda$.

Si $f_i = v$, comme $s - \frac{1}{p-1} * (\frac{1}{2} - \epsilon) > \frac{d}{2} - \frac{1}{p-1} - \frac{d\epsilon}{d+\epsilon}$ (si $\epsilon \ll \frac{1}{2(p-2)}$) alors par le lemme 23, on trouve

$$\left\| v \right\|_{L^{2(p-1)}([-T, T], \overline{W}^{\frac{1}{p-1} * (\frac{1}{2}-\epsilon)+\epsilon, \frac{d}{\epsilon}+1}(\mathbb{R}^d))} \leq CT^\kappa \left\| v \right\|_{\overline{X}_T^s}. \quad \square$$

Il est donc légitime d'introduire la définition suivante :

Définition 28 Soit $\lambda \geq 0$ et définissons $E_0(\lambda)$ comme l'ensemble des fonctions $u_0 \in \overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)$ qui vérifient

$$\begin{cases} \left\| u_0 \right\|_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)} \leq \lambda, \\ \left\| e^{-itH} u_0 \right\|_{L^{2p}([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{\frac{1}{7}, \infty}(\mathbb{R}^d))} \leq \lambda. \end{cases}$$

Puis, on peut établir les deux théorèmes principaux de cette partie.

Theorem 29 Il existe $s \in]\frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}; \frac{d}{2}[$, $C > 0$ et $\kappa > 0$ tels que si $u_0 \in E_0(\lambda)$ pour un certain $\lambda > 0$ alors pour tout $v \in \overline{X}_T^s$ et $0 < T \leq 1$,

$$\left\| \int_0^t e^{-i(t-s)H} K \cos(2s)^{\frac{d(p-1)}{2}-2} |e^{-isH} u_0 + v|^{p-1} \times (e^{-isH} u_0 + v) ds \right\|_{\overline{X}_T^s} \leq C \times T^\kappa \times (\lambda^p + \|v\|_{\overline{X}_T^s}^p).$$

Preuve. En utilisant les propositions 12 et 3, on obtient

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t e^{-i(t-s)H} K \cos(2s)^{\frac{d(p-1)}{2}-2} |e^{-isH} u_0 + v|^{p-1} \times (e^{-isH} u_0 + v) ds \right\|_{\overline{X}_T^s} \\ & \leq C \| K \cos(2s)^{\frac{d(p-1)}{2}-2} \times |e^{-isH} u_0 + v|^{p-1} \times (e^{-isH} u_0 + v) \|_{L^1([-T, T], \overline{H}^s(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq C \| |e^{-isH} u_0 + v|^{p-1} \times (e^{-isH} u_0 + v) \|_{L^1([-T, T], \overline{H}^s(\mathbb{R}^d))} \\ & \leq C \| \nabla^s (|e^{-isH} u_0 + v|^{p-1} \times (e^{-isH} u_0 + v)) \|_{L^1([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \\ & \quad + C \| \langle x \rangle^s \times |e^{-isH} u_0 + v|^{p-1} \times (e^{-isH} u_0 + v) \|_{L^1([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))}. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant le lemme 24 et les propositions 25, 26 et 27, nous pouvons trouver une constante $\kappa > 0$ telle que pour tout $u_0 \in E_0(\lambda)$, $0 < T \leq 1$ et $v \in \overline{X}_T^s$,

$$\| \nabla^s (|e^{-isH} u_0 + v|^{p-1} \times (e^{-isH} u_0 + v)) \|_{L^1([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \leq CT^\kappa (\lambda^p + \|v\|_{\overline{X}_T^s}^p),$$

et

$$\| \langle x \rangle^s \times |e^{-isH} u_0 + v|^{p-1} \times (e^{-isH} u_0 + v) \|_{L^1([-T, T], L^2(\mathbb{R}^d))} \leq CT^\kappa (\lambda^p + \|v\|_{\overline{X}_T^s}^p).$$

□

De manière similaire, on peut démontrer le théorème suivant :

Theorem 30 Il existe $s \in]\frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}; \frac{d}{2}[$ (le même que dans le théorème précédent), $C > 0$ et $\kappa > 0$ tels que si $u_0 \in E_0(\lambda)$ pour un certain $\lambda > 0$ alors pour tout $0 < T \leq 1$ et $v_1, v_2 \in \overline{X}_T^s$,

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t e^{-i(t-s)H} K \cos(2s)^{\frac{d(p-1)}{2}-2} |e^{-isH} u_0 + v_1|^{p-1} \times (e^{-isH} u_0 + v_1) ds \right. \\ & \quad \left. - \int_0^t e^{-i(t-s)H} K \cos(2s)^{\frac{d(p-1)}{2}-2} |e^{-isH} u_0 + v_2|^{p-1} \times (e^{-isH} u_0 + v_2) ds \right\|_{\overline{X}_T^s} \\ & \leq CT^\kappa \times \|v_1 - v_2\|_{\overline{X}_T^s} \times (\lambda^{p-1} + \|v_1\|_{\overline{X}_T^s}^{p-1} + \|v_2\|_{\overline{X}_T^s}^{p-1}). \end{aligned}$$

6. Solutions globales pour l'équation (NLS)

Dans cette partie, on applique un théorème de point fixe pour établir l'existence de solutions globales pour l'équation (NLS). Comme dans [P], on introduit l'équation suivante :

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} - Hu = K \cos(2t)^{\frac{d(p-1)}{2}-2} \times |u|^{p-1} u, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (\text{NLSH})$$

où $p \geq 5$ désigne un entier impair et $K \in \{-1, 1\}$.

Theorem 31 *Il existe $s \in]\frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}; \frac{d}{2}[$, $C > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $0 < T \leq 1$, si $u_0 \in E_0(\lambda)$ avec $\lambda < C \times T^{-\delta}$ alors il existe une unique solution à l'équation (NLSH) sur $[-T, T]$ dans l'espace $e^{-itH}u_0 + B_{\overline{X}_T^s}(0, \lambda)$.*

Preuve. Définissons

$$L(v) = -i \int_0^t e^{-i(t-s)H} K \cos(2s)^{\frac{d(p-1)}{2}-2} |e^{-isH}u_0 + v(s)|^{p-1} (e^{-isH}u_0 + v(s)) ds,$$

et remarquons que $u = e^{-itH}u_0 + v$ est l'unique solution de (NLSH) sur $[-T, T]$ dans l'espace $e^{-itH}u_0 + B_{\overline{X}_T^s}(0, R)$ si et seulement si v est l'unique point fixe de L sur $B_{\overline{X}_T^s}(0, R)$.

Selon les propositions 29 et 30, il existe deux constantes $C > 0$ et $\kappa > 0$ telles que

$$\begin{aligned} \|L(v)\|_{\overline{X}_T^s} &\leq CT^\kappa (\lambda^p + \|v\|_{\overline{X}_T^s}^p) \\ \|L(v_1) - L(v_2)\|_{\overline{X}_T^s} &\leq CT^\kappa \|v_1 - v_2\|_{\overline{X}_T^s} (\lambda^{p-1} + \|v_1\|_{\overline{X}_T^s}^{p-1} + \|v_2\|_{\overline{X}_T^s}^{p-1}). \end{aligned}$$

Par conséquent, si $\lambda < (\frac{1}{8CT^\kappa})^{\frac{1}{p-1}}$ alors L est une application contractante de $B_{\overline{X}_T^s}(0, \lambda)$ et le théorème suit. \square

Theorem 32 *Il existe $s \in]\frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}; \frac{d}{2}[$, $C_1, C_2 > 0$ tel que si $u_0 \in E_0(\lambda)$ avec $\lambda < C_1$ alors il existe une solution globale à (NLS) dans l'espace $e^{it\Delta}u_0 + B_{X^s}(0, C_2)$.*

Preuve. Soit u donnée par le théorème 31 avec $T = \frac{\pi}{4}$. On applique à u la transformation de lentille définie en section 2.3 de [P] pour obtenir une fonction \tilde{u} qui, d'après les propositions 20 et 23 de [P], vérifie les conditions du théorème. \square

Theorem 33 *Il existe $s \in]\frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}; \frac{d}{2}[$, $C_1, C_2 > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $0 < T \leq 1$, si $u_0 \in E_0(\lambda)$ avec $\lambda < C_1(\arctan 2T)^{-\delta}$ alors il existe une solution à (NLS) sur $[-T, T]$ dans l'espace $e^{it\Delta}u_0 + B_{X_T^s}(0, C_2\lambda^p)$.*

Preuve. Soit u donnée par le théorème 31 à T remplacé par $\frac{1}{2} \arctan 2T$. Puis, comme pour le théorème précédent, on applique à u la transformation de lentille définie en section 2.3 de [P] pour obtenir une fonction \tilde{u} qui, d'après la proposition 20 de [P] et la proposition 14, vérifie les conditions du théorème. \square

On démontre ensuite l'unicité des solutions construites.

Theorem 34 *Soient $\frac{d}{2} > s > \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}$, $u_0 \in E_0(\lambda)$ et $T \in]0, 1]$. Supposons donné \tilde{u}_1 et \tilde{u}_2 deux solutions de (NLS) sur $[-T, T]$ de l'espace $e^{it\Delta}u_0 + X_T^s$ alors,*

$$\tilde{u}_1(t) = \tilde{u}_2(t) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^d), \forall t \in [-T, T].$$

Preuve. Comme pour le théorème 69 de [P], il suffit de prouver le théorème pour $t \in [0, T]$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} &\partial_t \|\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &= 2\Re(\langle \partial_t(\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t)), \tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)}) \\ &= 2|\langle |\tilde{u}_1(t)|^{p-1}\tilde{u}_1(t) - |\tilde{u}_2(t)|^{p-1}\tilde{u}_2(t), \tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)}| \\ &\leq 2\|\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \times \|\ |\tilde{u}_1(t)|^{p-1}\tilde{u}_1(t) - |\tilde{u}_2(t)|^{p-1}\tilde{u}_2(t) \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2(p-1)\|\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \times \left(\|\tilde{u}_1(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^{p-1} + \|\tilde{u}_2(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^{p-1} \right). \end{aligned}$$

Puis, par le lemme de Gronwall, le théorème est prouvé si $\|\tilde{u}_1(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^{p-1} + \|\tilde{u}_2(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^{p-1} \in L_{loc}^1$ puisque $\|\tilde{u}_1(0) - \tilde{u}_2(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = 0$.

Mais, en utilisant les propositions 14 et 23, on obtient

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_i\|_{L^{p-1}([0,T]),L^\infty(\mathbb{R}^d)} &\leq \|e^{it\Delta}u_0\|_{L^{p-1}([0,T]),L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \|\tilde{v}_i\|_{L^{p-1}([0,T]),L^\infty(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C_T \times (\|e^{-itH}u_0\|_{L^{p-1}([-2\pi,2\pi]),L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \|\tilde{v}_i\|_{X_T^s}) \\ &\leq C_T \times (\lambda + \|\tilde{v}_i\|_{X_T^s}). \end{aligned}$$

et le théorème est démontré. \square

Enfin, on démontre que les solutions globales construites diffusent en ∞ et en $-\infty$.

Theorem 35 *Soit \tilde{u} l'unique solution globale de (NLS) construite dans le théorème 32 alors il existe $L^+ \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$ et $L_- \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$ tels que*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0 - e^{it\Delta}L^+\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \|\tilde{u}(t) - e^{it\Delta}u_0 - e^{it\Delta}L_-\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} &= 0. \end{aligned}$$

Preuve. On pose $T = \frac{\pi}{4}$, alors grâce aux propositions 25, 26 et 27, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-i(t-s)H} K \cos(2s)^{\frac{d(p-1)}{2}-2} [|e^{-isH}u_0 + v(s)|^{p-1} \times (e^{-isH}u_0 + v(s))] ds \\ \in \overline{X}_T^s \hookrightarrow C^0([-T,T], \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)). \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $L \in \overline{H}^s(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow T} \left\| \int_0^t e^{-i(t-s)H} K \cos(2s)^{\frac{d(p-1)}{2}-2} [|e^{-isH}u_0 + v(s)|^{p-1} (e^{-isH}u_0 + v(s))] ds - L \right\|_{\overline{H}^s} = 0,$$

puis

$$\lim_{t \rightarrow T} \left\| \int_0^t e^{isH} K \cos(2s)^{\frac{d(p-1)}{2}-2} [|e^{-isH}u_0 + v(s)|^{p-1} (e^{-isH}u_0 + v(s))] ds - e^{iTH}L \right\|_{\overline{H}^s} = 0.$$

Or, d'après le lemme 70 de [P], on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t) &= e^{-itH} \int_0^t e^{isH} K \cos(2s)^{\frac{d(p-1)}{2}-2} [|e^{-isH}u_0 + v(s)|^{p-1} * (e^{-isH}u_0 + v(s))] ds \\ &= e^{it\Delta} \int_0^{\frac{1}{2} \arctan 2t} e^{isH} K \cos(2s)^{\frac{d(p-1)}{2}-2} [|e^{-isH}u_0 + v(s)|^{p-1} * (e^{-isH}u_0 + v(s))] ds, \end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{v}(t) - e^{it\Delta}e^{iTH}L\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

\square

7. Estimation de la régularité de la donnée initiale aléatoire

Définition 36 *Pour $t > 0$, définissons*

$$\Omega_t = (\omega \in \Omega / u_0^\omega \in E_0(t)).$$

Le but de cette partie est d'établir le théorème suivant :

Theorem 37 *Sous les hypothèses (H_γ) et (H_{E_1}) ou (H_{E_2}) , il existe des constantes $m(\gamma), C, c > 0$ telles que pour tout $t > 0$,*

$$P(\Omega_t^c) \leq C \exp \left(-c \left(\frac{t}{\|u_0\|_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)}} \right)^{m(\gamma)} \right),$$

où

$$m(\gamma) = \begin{cases} \frac{2\gamma}{2+\gamma} & \text{sous } (H_{E_1}) \quad \text{si } \gamma \in]0, 1], \\ \frac{3\gamma}{2\gamma+3} & \text{sous } (H_{E_2}) \quad \text{si } \gamma \in]0, 1], \\ \gamma & \text{sous } (H_{E_2}) \quad \text{si } \gamma \in]1, 2], \\ 2 & \text{sous } (H_{E_2}) \quad \text{si } \gamma \geq 2. \end{cases}$$

Par l'inégalité triangulaire, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} & P(\Omega_t^c) \\ & \leq P \left(\omega \in \Omega / \|u_0^\omega\|_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \geq t \right) + P \left(\omega \in \Omega / \|e^{-itH} u_0\|_{L^{2p}([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{\frac{1}{p}, \infty}(\mathbb{R}^d))} \geq t \right) \end{aligned} \quad (8)$$

et il suffit de montrer la majoration du théorème 37 pour chacun de ces deux termes. On commence par évaluer les moments de nos variables aléatoires à travers le lemme suivant :

Lemma 38 *Sous l'hypothèse (H_γ) , il existe des constantes $C_1, C_2, c > 0$ telles que pour tout $p \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}$,*

$$E(|g_n|^p) \leq \begin{cases} C_1 \times \left(\frac{p}{\gamma c} \right)^{\frac{p}{\gamma}} & \text{si } p \geq \gamma, \\ C_2 & \text{si } p \leq \gamma. \end{cases}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} E(|g_n|^p) &= p \int_0^\infty \rho^{p-1} \times P(\omega \in \Omega / |g_n(\omega)| \geq \rho) \, d\rho \\ &\leq p \int_0^\infty \rho^{p-1} \times C e^{-c\rho^\gamma} \, d\rho \\ &\leq \frac{Cp}{\gamma} \times \left(\frac{1}{c} \right)^{\frac{p}{\gamma}} \times \int_0^\infty \mu^{\frac{p-\gamma}{\gamma}} \times e^{-\mu} \, d\mu \\ &\leq \frac{Cp}{\gamma} \times \left(\frac{1}{c} \right)^{\frac{p}{\gamma}} \times \Gamma \left(\frac{p}{\gamma} \right), \end{aligned}$$

où Γ désigne la fonction gamma d'Euler. En utilisant les estimées de la fonction Γ suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &\leq c(Cx)^{x-1} \quad \text{pour } x \geq 1, \\ \Gamma(x) &\leq \frac{C}{x} \quad \text{pour } x \leq 1, \end{aligned}$$

on prouve le résultat. \square

Puis, grâce à ce dernier lemme, nous pouvons estimer le premier terme de (8).

Proposition 39 *Sous l'hypothèse (H_γ) , il existe des constantes $C, c > 0$ telles que pour tout $t > 0$,*

$$P\left(\omega \in \Omega / \|u_0^\omega\|_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \geq t\right) \leq C \exp\left(-\frac{ct^\gamma}{\|u_0\|_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)}^\gamma}\right).$$

Preuve. Il suffit d'établir l'estimation pour $t \geq C\|u_0\|_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)}$. Soit $q \geq \max(1, \frac{\gamma}{2})$ alors d'après l'inégalité de Markov et le lemme 38, on trouve

$$\begin{aligned} P\left(\omega \in \Omega / \|u_0^\omega\|_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \geq t\right) &= P\left(\omega \in \Omega / \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{d-1} |c_n|^2 |g_n(\omega)|^2 \geq t^2\right) \\ &\leq t^{-2q} \times E_\omega \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{d-1} |c_n|^2 |g_n(\omega)|^2 \right)^q \\ &\leq t^{-2q} \times \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{d-1} |c_n|^2 |g_n(\cdot)|^2 \right\|_{L^q(\Omega)}^q \\ &\leq t^{-2q} \times \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{d-1} |c_n|^2 \|g_n(\cdot)\|_{L^{2q}(\Omega)}^2 \right)^q \\ &\leq \left(C \times \frac{\|u_0\|_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)}}{t} \times \left(\frac{2q}{\gamma c} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right)^{2q}. \end{aligned}$$

Puis, nous pouvons choisir $q = \frac{\gamma c}{2} \times \left(\frac{t}{2C\|u_0\|_{\overline{H}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{R}^d)}} \right)^\gamma \geq \max(1, \frac{\gamma}{2})$ pour obtenir

$$\begin{aligned} P\left(\omega \in \Omega / \|u_0^\omega\|_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \geq t\right) &\leq \frac{1}{2^{2q}} \\ &\leq e^{-2 \ln(2)q} \leq \exp\left(-\frac{ct^\gamma}{\|u_0\|_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)}^\gamma}\right). \end{aligned}$$

□

Dès lors, il reste le second terme de (8) à estimer. Pour cela, rappelons les estimées des fonctions propres de l'oscillateur harmonique dont la preuve peut être trouvée en corollaire 3.2 de [KT].

Proposition 40 *Pour tout $p \in [4, \infty]$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} \|h_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &\leq C \lambda_n^{-\frac{1}{6}} & \text{si } d = 1, \\ \|h_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} &\leq C \lambda_n^{-1 + \frac{d}{2}} & \text{si } d \geq 2. \end{aligned}$$

On établit ensuite la proposition fondamentale suivante qui permet d'estimer le second terme de (8).

Proposition 41 *On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle pour toute suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$ et tout $q \geq \max(2, \gamma)$,*

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n g_n(\omega) \right\|_{L^q(\Omega)} \leq C \times q^{\frac{1}{m(\gamma)}} \times \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2}, \quad (E_\gamma)$$

alors, sous cette condition, il existe deux constantes $C, c > 0$ telles que pour tout $t \geq 0$,

$$P \left(\omega \in \Omega / \|e^{-itH} u_0^\omega\|_{L^{2p}([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{\frac{1}{7}, \infty}(\mathbb{R}^d))} \geq t \right) \leq C \exp \left(-c \left(\frac{t}{\|u_0\|_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)}} \right)^{m(\gamma)} \right).$$

Preuve. Comme

$$\overline{W}^{\frac{1}{6}, r}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \overline{W}^{\frac{1}{7}, \infty}(\mathbb{R}^d) \quad \text{si} \quad \frac{1}{6} - \frac{1}{7} > \frac{d}{r},$$

on se ramène à démontrer l'existence de deux constantes $C, c > 0$ telles que pour tout $t \geq 0$ et $r \geq 2$,

$$P \left(\omega \in \Omega / \|e^{-itH} u_0^\omega\|_{L^{2p}([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{\frac{1}{6}, r}(\mathbb{R}^d))} \geq t \right) \leq C \exp \left(-c \left(\frac{t}{\|u_0\|_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)}} \right)^{m(\gamma)} \right). \quad (9)$$

Il suffit de montrer l'estimation pour $t \geq C\|u_0\|_{\overline{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)}$. D'après les inégalités de Markov et Minkowsky, on obtient pour $q \geq \max(2p, r, \gamma)$,

$$\begin{aligned} & P \left(\omega \in \Omega / \|e^{-itH} u_0^\omega\|_{L^{2p}([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{\frac{1}{6}, r}(\mathbb{R}^d))} \geq t \right) \\ & \leq t^{-q} \times \|e^{-itH} u_0^\omega\|_{L^q(\Omega, L^{2p}([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{\frac{1}{6}, r}(\mathbb{R}^d)))}^q \\ & \leq t^{-q} \times \|H^{\frac{1}{12}} e^{-itH} u_0^\omega\|_{L^{2p}([-2\pi, 2\pi], L^r(\mathbb{R}^d, L^q(\Omega)))}^q. \end{aligned}$$

Puis, grâce à l'hypothèse (E_γ) , on obtient

$$\begin{aligned} \|H^{\frac{1}{12}} e^{-itH} u_0^\omega\|_{L^q(\Omega)}^q &= \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{\frac{1}{6}} c_n e^{-it\lambda_n^2} h_n(x) g_n(\omega) \right\|_{L^q(\Omega)}^q \\ &\leq C q^{\frac{1}{m(\gamma)}} \times \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{\frac{1}{3}} |c_n|^2 \cdot |h_n(x)|^2}. \end{aligned}$$

Et finalement, par l'inégalité triangulaire et la proposition 40, on a

$$\begin{aligned}
& P \left(\omega \in \Omega / \|e^{-itH} u_0^\omega\|_{L^{2p}([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{\frac{1}{6}, r}(\mathbb{R}^d))} \geq t \right) \\
& \leq \left(\frac{Cq^{\frac{1}{m(\gamma)}}}{t} \right)^q \times \left\| \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{\frac{1}{3}} |c_n|^2 \cdot |h_n(x)|^2} \right\|_{L^r(\mathbb{R}^d)}^q \\
& \leq \left(\frac{Cq^{\frac{1}{m(\gamma)}}}{t} \right)^q \times \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{\frac{1}{3}} |c_n|^2 \cdot |h_n(x)|^2 \right\|_{L^{r/2}(\mathbb{R}^d)}^{q/2} \\
& \leq \left(\frac{Cq^{\frac{1}{m(\gamma)}}}{t} \right)^q \times \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{\frac{1}{3}} |c_n|^2 \|h_n(x)\|_{L^r(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{q/2} \\
& \leq \left(\frac{Cq^{\frac{1}{m(\gamma)}} \|u_0\|_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)}}{t} \right)^q.
\end{aligned}$$

Ainsi, il suffit de choisir $q = \left(\frac{t}{2C \|u_0\|_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)}} \right)^{m(\gamma)}$ pour obtenir (9). \square

Dès lors, on se ramène donc à démontrer (E_γ) pour obtenir le théorème 37.

7.1. Preuve de (E_γ) sous (H_{E_1}) si $\gamma \in]0, 1]$

Dans [QL], théorème 4.6, on a le lemme suivant :

Lemme 42 *Sous l'hypothèse (H_{E_1}) , il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $q \geq 1$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$,*

$$E \left(\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n * g_n(\omega) \right)^{2q} \right) \leq (Cq)^q \times E \left(\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (c_n * g_n(\omega))^2 \right)^q \right).$$

Puis, en utilisant le lemme 38, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n g_n(\omega) \right\|_{L^{2q}(\Omega)}^{2q} & \leq (Cq)^q \times \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^2 g_n(\omega)^2 \right\|_{L^q(\Omega)}^q \\
& \leq (Cq)^q \times \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 \times \|g_n\|_{L^{2q}(\Omega)}^2 \right)^q \\
& \leq \left(C \times q^{1+\frac{2}{\gamma}} \times \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 \right)^q.
\end{aligned}$$

Et (E_γ) est prouvé.

7.2. Preuve de (E_γ) sous (H_{E_2}) si $\gamma \in]0, 1]$

On commence par introduire une nouvelle définition :

Définition 43 *Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit*

$$\mathcal{B}_{2p} = \left\{ \sigma \in \mathcal{S}_{2p} / \sigma(i) \neq i, \forall i \in \{1, \dots, 2p\} \text{ et la longueur des cycles disjoints de } \sigma \text{ est égal à 2 ou 3} \right\}.$$

Puis, on établit quelques propriétés de \mathcal{B}_{2p} .

Lemma 44 *Supposons donné $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires vérifiant $E(X_n) = 0$ et $(n_1, \dots, n_{2p}) \in \mathbb{N}^{2p}$.*

$$\begin{aligned} & \text{Si } E(X_{n_1} \times \dots \times X_{n_{2p}}) \neq 0, \\ & \text{alors, il existe } \sigma \in \mathcal{B}_{2p} \text{ telle que } n_{\sigma(i)} = n_i, \forall i \in \{1, \dots, 2p\}. \end{aligned}$$

Preuve. Ce résultat est clair par récurrence sur p . □

Lemma 45 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,*

$$\text{Card}(\mathcal{B}_{2p}) \leq (Cp)^{\frac{4p}{3}}.$$

Preuve. On utilise la formule de Stirling. On a

-pour un ensemble à $2n$ éléments, le nombre de permutation qui ne fixe aucun point et constituée uniquement de transpositions dans leur décomposition en cycles disjoints est égal à $\frac{(2n)!}{2^n n!} \leq (Cn)^n$.

-pour un ensemble à $3n$ élément, le nombre de permutation qui ne fixe aucun point et constituée uniquement de 3-cycles dans leur décomposition en cycles disjoints est égal à $\frac{(3n)!}{3^n n!} \leq (Cn)^{2n}$.

Par conséquent, on obtient

$$\text{Card}(\mathcal{B}_{2p}) \leq C^p \times \sum_{k=0}^p \binom{2p}{2k} k^k (p-k)^{\frac{4(p-k)}{3}} \leq (Cp)^{\frac{4p}{3}}. \quad \square$$

Pour prouver (E_γ) , il suffit de traiter le cas $q = 2p$ où $p \in \mathbb{N}^*$ et nous devons prouver que

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n g_n(\omega) \right\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p} \leq (Cp)^{\frac{2p(2\gamma+3)}{3\gamma}} \times \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 \right)^p.$$

On utilise les lemmes 44 et 45 pour obtenir que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n g_n(\omega) \right\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p} &= \sum_{n_1, \dots, n_{2p}} c_{n_1} \dots c_{n_p} \overline{c_{n_{p+1}}} \dots \overline{c_{n_{2p}}} \times E \left(\prod_{i=1}^{2p} g_{n_i} \right) \\
&\leq \sum_{n_1, \dots, n_{2p}} |c_{n_1}| \dots |c_{n_{2p}}| \times \left| E \left(\prod_{i=1}^{2p} g_{n_i} \right) \right| \\
&\leq \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{B}_{2p}} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_{2p}, \\ n_{\sigma(i)} = n_i}} |c_{n_1}| \dots |c_{n_{2p}}| \right) \times \sup_{n \in \mathbb{N}} E(|g_n|^{2p}) \\
&\leq \text{Card}(\mathcal{B}_{2p}) \times (Cp)^{\frac{2p}{\gamma}} \times \sup_{\sigma \in \mathcal{B}_{2p}} \left(\sum_{\substack{n_1, \dots, n_{2p}, \\ n_{\sigma(i)} = n_i}} |c_{n_1}| \dots |c_{n_{2p}}| \right) \\
&\leq (Cp)^{\frac{2p(2\gamma+3)}{3\gamma}} \times \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2 \right)^p,
\end{aligned}$$

où dans la dernière inégalité on utilise que $l^2(\mathbb{N}) \hookrightarrow l^p(\mathbb{N})$ pour $p \geq 2$. \square

7.3. Preuve de (E_γ) sous (H_{E_2}) si $\gamma \in]1, 2]$

Dans cette partie, on s'inspire de la preuve de [BT2] en essayant de remplacer l'hypothèse (H_2) par l'hypothèse (H_γ) .

Proposition 46 *Soit X une variable aléatoire d'espérance nulle telle qu'il existe des constantes $C, c > 0$ telles que pour tout $t \in [-2, 2]$,*

$$E(e^{|tX|}) \leq Ce^{ct^2},$$

alors il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$E(e^{tX}) \leq e^{ct^2}.$$

Preuve. De

$$e^u = 1 + u + u^2 \int_0^1 (1 - \theta) e^{u\theta} d\theta,$$

on déduit pour tout $t \in [-1, 1]$ que

$$\begin{aligned}
E(e^{tX}) &= 1 + t^2 \int_0^1 (1 - \theta) E(X^2 e^{t\theta X}) d\theta \\
&\leq 1 + t^2 \int_0^1 \sqrt{E(X^4) E(e^{2t\theta X})} d\theta \\
&\leq 1 + Ct^2 \int_0^1 e^{2ct^2\theta^2} d\theta \\
&\leq 1 + Ct^2 e^{2ct^2} \\
&\leq e^{c't^2}.
\end{aligned}$$

\square

Proposition 47 *Sous les hypothèses (H_γ) et (H_{E_2}) , il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$,*

$$E(e^{tg_n}) \leq \begin{cases} e^{ct^2} & \text{si } |t| \leq 1, \\ e^{c|t|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} & \text{si } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Preuve. Sous l'hypothèse (H_γ) , on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} E(e^{|t||g_n|}) &= 1 + |t| \times \int_0^\infty e^{t\rho} \times P(\omega \in \Omega / |g_n(\omega)| \geq \rho) \, d\rho \\ &\leq 1 + C|t| \times \int_0^\infty e^{t|\rho - c|\rho|^\gamma} \, d\rho \\ &\leq 1 + C|t| \times \sup_{\rho \in \mathbb{R}^+} \left(e^{t|\rho - \frac{c}{2}|\rho|^\gamma} \right) \times \int_0^\infty e^{-\frac{c}{2}|\rho|^\gamma} \, d\rho \\ &\leq 1 + C(\gamma) \times |t| \times e^{|t|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \times (\frac{2}{c\gamma})^{1/(\gamma-1)} \times \frac{\gamma-1}{\gamma}} \\ &\leq 1 + C(\gamma) \times |t| \times e^{c(\gamma)|t|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$E(e^{|t||g_n|}) \leq \begin{cases} C'e^{c't^2} & \text{si } |t| \leq 2, \\ e^{c'|t|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} & \text{si } |t| \geq 1, \end{cases}$$

et nous pouvons utiliser la proposition 46 pour conclure. \square

Proposition 48 *Sous les hypothèses (H_γ) et (H_{E_2}) , il existe deux constantes $C, c > 0$ telles que pour tout $\rho \geq 0$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$,*

$$P\left(\omega \in \Omega / \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n g_n(\omega) \right| \geq \rho\right) \leq Ce^{-c\left(\frac{\rho}{\|c_n\|_{l^2(\mathbb{N})}}\right)^\gamma}.$$

Preuve. On écrit,

$$\begin{aligned} &P\left(\omega \in \Omega / \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n g_n(\omega) \right| \geq \rho\right) \\ &\leq P\left(\omega \in \Omega / \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n g_n(\omega) \geq \rho\right) + P\left(\omega \in \Omega / \sum_{n \in \mathbb{N}} -c_n g_n(\omega) \geq \rho\right), \end{aligned}$$

et il suffit de montrer la majoration pour le premier terme.

D'après l'inégalité de Markov et la proposition 47, on obtient pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
P\left(\omega \in \Omega / \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n g_n(\omega) \geq \rho\right) &= P\left(\omega \in \Omega / \exp\left(t \times \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n g_n(\omega)\right) \geq e^{t\rho}\right) \\
&\leq e^{-t\rho} \times E\left(\exp\left(t \times \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n g_n(\omega)\right)\right) \\
&\leq e^{-t\rho} \times \prod_{n \in \mathbb{N}} E\left(e^{t \times c_n g_n(\omega)}\right) \\
&\leq e^{-t\rho} \times \prod_{n \in \mathbb{N}} \max\left(e^{c \times |c_n \cdot t|^2}, e^{c \times |t \cdot c_n|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}\right) \\
&\leq e^{-t\rho} \times \exp\left(c \times \sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n \cdot t|^2\right) \times \exp\left(c \times \sum_{n \in \mathbb{N}} |t \cdot c_n|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right) \\
&\leq e^{-t\rho} \times \exp\left(c \times (t \|c_n\|_{l^2})^2\right) \times \exp\left(c \times (t \|c_n\|_{l^2})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right),
\end{aligned}$$

puis, il suffit de choisir $t = \epsilon \frac{\rho^{\gamma-1}}{\|c_n\|_{l^2}^{\gamma-1}}$ pour obtenir le résultat souhaité. \square

Proposition 49 *Sous les hypothèses (H_γ) et (H_{E_2}) , il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $q \geq 2$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$,*

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n g_n(\omega) \right\|_{L^q(\Omega)} \leq C \times q^{\frac{1}{\gamma}} \times \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^2}.$$

Preuve. En utilisant la proposition 48, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n g_n(\omega) \right\|_{L^q(\Omega)}^q &= q \int_0^\infty \rho^{q-1} \times P\left(\omega \in \Omega / \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n g_n(\omega) \right| \geq \rho\right) d\rho \\
&\leq Cq \int_0^\infty \rho^{q-1} \times e^{-c \left(\frac{\rho}{\|c_n\|_{l^2}(\mathbb{N})} \right)^\gamma} d\rho \\
&\leq (C \|c_n\|_{l^2}(\mathbb{N}))^q \times q \int_0^\infty u^{q/\gamma-1} \times e^{-u} du \\
&\leq (C' \|c_n\|_{l^2}(\mathbb{N}))^q \times q^{\frac{q}{\gamma}}.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve la proposition. \square

Et démontre (E_γ) .

8. Preuves des théorèmes

Dans cette section, on démontre les théorèmes 7, 8 et 9.

8.1. Preuve du théorème 7

En utilisant les théorèmes 32, 34, 35, pour obtenir le théorème 7, il suffit d'établir que pour tout $t > 0$,

$$P(\Omega_t) > 0. \quad (10)$$

Pour cela, introduisons la définition suivante :

Définition 50 Pour $u_0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n h_n(x)$ une fonction de $L^2(\mathbb{R}^d)$, nous définissons pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} [u_0]_N &= \sum_{\lambda_n < N} c_n h_n(x), \\ [u_0]^N &= \sum_{\lambda_n \geq N} c_n h_n(x). \end{aligned}$$

Proposition 51 Sous les hypothèses (H_γ) et (H_{E_1}) ou (H_γ) et (H_{E_2}) , pour tout $t > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\begin{aligned} P(\Omega_t) &\geq \frac{1}{2} \\ &\times P\left(\omega \in \Omega / \|[u_0^\omega]_N\|_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{t}{2} \cap \|e^{-itH}[u_0^\omega]_N\|_{L^{2p}([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{\frac{1}{p}, \infty}(\mathbb{R}^d))} \leq \frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

Preuve. Par indépendance, en utilisant le théorème 37, on obtient

$$\begin{aligned} &P(\Omega_t) \\ &= P\left(\omega \in \Omega / \|[u_0^\omega]_N + [u_0^\omega]^N\|_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \leq t \right. \\ &\quad \left. \cap \|e^{-itH}[u_0^\omega]_N + e^{-itH}[u_0^\omega]^N\|_{L^{2p}([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{\frac{1}{p}, \infty}(\mathbb{R}^d))} \leq t\right) \\ &\geq P\left(\omega \in \Omega / \|[u_0^\omega]_N\|_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{t}{2} \cap \|e^{-itH}[u_0^\omega]_N\|_{L^{2p}([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{\frac{1}{p}, \infty}(\mathbb{R}^d))} \leq \frac{t}{2}\right) \\ &\quad \times P\left(\omega \in \Omega / \|[u_0^\omega]^N\|_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{t}{2} \cap \|e^{-itH}[u_0^\omega]^N\|_{L^{2p}([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{\frac{1}{p}, \infty}(\mathbb{R}^d))} \leq \frac{t}{2}\right) \\ &\geq P\left(\omega \in \Omega / \|[u_0^\omega]_N\|_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{t}{2} \cap \|e^{-itH}[u_0^\omega]_N\|_{L^{2p}([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{\frac{1}{p}, \infty}(\mathbb{R}^d))} \leq \frac{t}{2}\right) \\ &\quad \times \left(1 - C \exp\left(-\frac{ct^{m(\gamma)}}{(\sum_{\lambda_n \geq N} \lambda_n^{d-1} \times |c_n|^2)^{m(\gamma)/2}}\right)\right). \end{aligned}$$

Or

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 1 - C \exp\left(-\frac{ct^{m(\gamma)}}{(\sum_{\lambda_n \geq N} \lambda_n^{d-1} \times |c_n|^2)^{m(\gamma)/2}}\right) = 1,$$

ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 - C \exp\left(-\frac{ct^{m(\gamma)}}{(\sum_{\lambda_n \geq N} \lambda_n^{d-1} \times |c_n|^2)^{m(\gamma)/2}}\right) \geq \frac{1}{2}$. \boxtimes

Par conséquent, pour prouver (10), il suffit de prouver la proposition suivante :

Proposition 52 Sous l'hypothèse (H_{01}) , pour tout $t > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$,

$$P\left(\omega \in \Omega / \|[u_0^\omega]_N\|_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \leq t \cap \|e^{-itH}[u_0^\omega]_N\|_{L^{2p}([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{\frac{1}{p}, \infty}(\mathbb{R}^d))} \leq t\right) > 0.$$

Preuve. En utilisant l'hypothèse (H_{01}) , on obtient

$$\begin{aligned}
& P \left(\omega \in \Omega / \| [u_0^\omega]_N \|_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \leq t \cap \| e^{-itH} [u_0^\omega]_N \|_{L^{2p}([-2\pi, 2\pi], \overline{W}^{\frac{1}{p}, \infty}(\mathbb{R}^d))} \leq t \right) \\
& \geq P \left(\omega \in \Omega / \sum_{\lambda_n < N} \lambda_n^{d-1} |c_n|^2 |g_n(\omega)|^2 \leq \frac{Ct^2}{N^{2d}} \right) \\
& \geq P \left(\omega \in \Omega / \sum_{\lambda_n < N} |g_n(\omega)|^2 \leq \frac{Ct^2}{N^{2d} \times \|u_0\|_{\overline{H}^{d-1}(\mathbb{R}^d)}^2} \right) \\
& \geq P \left(\bigcap_{\lambda_n < N} \left(\omega \in \Omega / |g_n(\omega)|^2 \leq \frac{Ct^2}{N^{4d} \times \|u_0\|_{\overline{H}^{d-1}(\mathbb{R}^d)}^2} \right) \right) \\
& \geq \prod_{\lambda_n < N} P \left(\omega \in \Omega / |g_n(\omega)|^2 \leq \frac{Ct^2}{N^{4d} \times \|u_0\|_{\overline{H}^{d-1}(\mathbb{R}^d)}^2} \right) > 0. \quad \square
\end{aligned}$$

8.2. Preuve du théorème 8

On adapte ici la preuve du paragraphe 5 de [BT2]. Grâce aux théorèmes 33 et 34, on sait que si $u_0 \in E_0((\arctan 2T)^{-\delta})$ alors il existe une unique solution à l'équation (NLS) sur $[-T, T]$ dans l'espace $e^{it\Delta}u_0 + B_{X_T^s}(0, C_T)$.

Définissons

$$\Omega_T = \left(\omega \in \Omega / u_0^\omega \in E_0((\arctan 2T)^{-\delta}) \right),$$

alors par le théorème 37,

$$P(\Omega_T^c) \leq C \exp(-c(\arctan 2T)^{-\delta'}).$$

Par conséquent, si nous posons

$$\Sigma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_{1/n}$$

alors $P(\Sigma) = 1$ et le théorème 8 est prouvé. \square

8.3. Preuve du théorème 9

Grâce aux théorèmes 32, 34 et 35, pour prouver le théorème 9, il suffit d'établir que pour tout $\lambda > 0$,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} P \left(\omega \in \Omega_\lambda^c \mid \|u_0^\omega\|_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \leq \eta \right) = 0. \quad (11)$$

Nous pouvons ensuite utiliser la même méthode que la proposition A.7 de [BT4] pour obtenir que

$$P \left(\omega \in \Omega_\lambda^c \mid \|u_0^\omega\|_{\overline{H}^{(d-1)/2}(\mathbb{R}^d)} \leq \eta \right) \leq C e^{-c \frac{\lambda^2}{\eta^2}},$$

et (11) est démontré.

Références

- [Bou1] Jean-Marc Bouclet. *Distributions spectrales pour des opérateurs perturbés*. PhD thesis, Nantes university, 2000.
- [Bou2] Jean Bourgain. *Global solutions of non linear Schrödinger equations*. American Mathematical Society Colloquium Publications, 46.
- [Bou3] Jean Bourgain. On nonlinear schrödinger equations. *Inst. Hautes Études Sci.*, pages 11–21, 1998.
- [Bu] Nicolas Burq. Mesures semi-classiques et mesures de défaut. *Séminaire Bourbaki*, 826 :167–195, 1997.
- [BGT1] Nicolas Burq, Patrick Gérard, and Nikolay Tzvetkov. Strichartz inequalities and the non linear schrödinger equation on compact manifolds. *American Journal of Mathematics*, 126(3) :569–605, Juin 2004.
- [BGT2] Nicolas Burq, Patrick Gérard, and Nikolay Tzvetkov. Bilinear eigenfunction estimates and the nonlinear schrödinger equation on surfaces. *Inventiones Mathematicae*, 159(1) :187–223, 2005.
- [BGT3] Nicolas Burq, Patrick Gérard, and Nikolay Tzvetkov. Multilinear eigenfunction estimates and global existence for the three dimensional nonlinear schrödinger equations. *Annales Scientifiques de l'école Normale Supérieure*, 38(2) :255 – 301, 2005.
- [BL] Nicolas Burq and Gilles Lebeau. Injections de sobolev probabilistes et applications. In <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/64/67/49/PDF/bule7.pdf>, 2011.
- [BT1] Nicolas Burq and Nikolay Tzvetkov. Invariant measure for a three dimensional nonlinear wave equation. *International Mathematics Research Notices*, 22, 2007.
- [BT2] Nicolas Burq and Nikolay Tzvetkov. Random data cauchy theory for supercritical wave equations i : local theory. *Inventiones Mathematicae*, 173(3) :449–475, 2008.
- [BT3] Nicolas Burq and Nikolay Tzvetkov. Random data cauchy theory for supercritical wave equations ii : a global existence result. *Inventiones Mathematicae*, 173(3) :477–496, 2008.
- [BT4] Nicolas Burq and Nikolay Tzvetkov. Probabilistic well-posedness for the cubic wave equation. In <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/57/52/01/PDF/hadamard.pdf>, 2011.
- [BTT] Nicolas Burq, Nikolay Tzvetkov, and Laurent Thomann. Long time dynamics for the one dimensional non linear schrödinger equation. In <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/45/86/10/PDF/osc-harmonique.pdf>, 2010.
- [CO] James Colliander and Tadahiro Oh. Almost sure well-posedness of the cubic nonlinear schrödinger equation below $l^2(\mathbb{T})$. *Duke Math. J.*, 3 :367–414, 2012.
- [D] Yu Deng. Two dimensional nls equation with random radial data. In <http://arxiv.org/pdf/1008.2657v2.pdf>, 2010.
- [DG] Jacek Dziubanski and Pawel Glowacki. Sobolev spaces related to schrödinger operators with polynomial potentials. *Mathematische Zeitschrift*, 262 :881–894, 2009.
- [H] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operator III*. Springer Verlag, 1985.
- [KT] Herbert Koch and Daniel Tataru. l^p eigenfunction bounds for the hermite operator. *Duke Math. J.*, 128(2) :369 – 392, 2005.
- [M] Andre Martinez. *An introduction to semiclassical and microlocal analysis*. Springer.
- [P] Aurélien Poiret. Solutions globales pour l'équation de schrödinger cubique en dimension 3. In <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/71/50/74/PDF/article1.pdf>.
- [QL] Hervé Queffelec and Daniel Li. *Introduction à l'étude des espaces de Banach*. Edp Sciences, 2005.
- [R] Daniel Robert. *Autour de l'approximation semi classique*. Progress in mathematics, Birkhäuser, 1987.
- [Ta1] Terence Tao. *Nonlinear dispersive equations : local and global analysis*. American Mathematical Society, 2006.
- [Ta2] Terence Tao. A pseudoconformal compactification of the nonlinear schrödinger equation and applications. *New York Journal of Mathematics*, 15 :265–282, 2009.
- [Th1] Laurent Thomann. Random data cauchy problem for supercritical schrödinger equations. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 26(6) :2385 – 2402, 2009.

- [Th2] Laurent Thomann. A remark on the schrödinger smoothing effect. *Asymptot. Anal.*, 69(1-2) :117 – 123, 2010.
- [Y] Kenji Yajima. On smoothing property of schrödinger propagators. In Hiroshi Fujita, Teruo Ikebe, and Shige Kuroda, editors, *Functional-Analytic Methods for Partial Differential Equations*, volume 1450 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 20–35. Springer Berlin / Heidelberg, 1990.
- [YZ1] Kenji Yajima and Guoping Zhang. Smoothing property for schrödinger equations with potential superquadratic at infinity. *Communications in Mathematical Physics*, 221(3) :573–590, 2001.
- [YZ2] Kenji Yajima and Guoping Zhang. Local smoothing property and strichartz inequality for schrödinger equations with potentials superquadratic at infinity. *Journal of Differential Equations*, 202(1) :81 – 110, 2004.